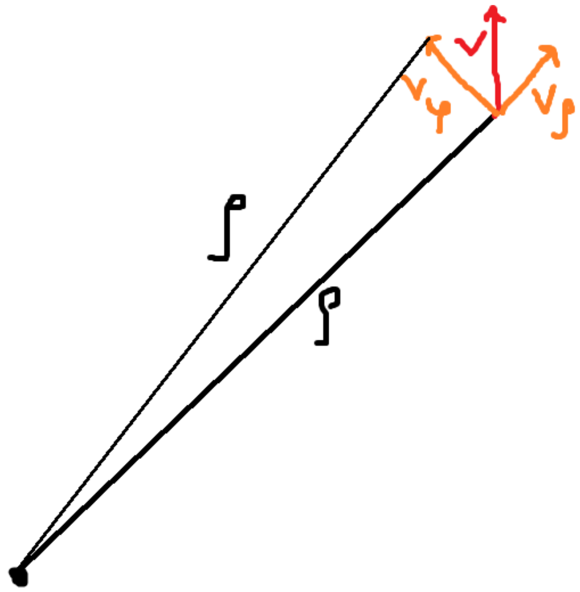
С декартовой системой координат мы все хорошо знакомы.
Однако в теормехе мы будем часто работать и в других СК. Посмотрим, к чему это приведёт. Каких-то новых физических результатов мы в этой главе не получим, но технику отработаем.

2D:
У скорости есть две проекции: v_x и v_y. Они по определению есть $\dot{x}$ и $\dot{y}$.
Квадрат скорости в декартовой СК – это $v_x^2 + v_y^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$,
Кин.энергия $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

А что в полярной? Там координаты уже не x и y, а ρ и φ. Физики вводят так называемые обобщённые скорости.
Обобщённые скорости – это производные по времени координат.
В полярной СК таковыми являются $\dot{\rho}$ и $\dot{\varphi}$.

Замечание: обобщённые скорости вовсе не обязаны имеет размерность м/с (см/с). Например, $\dot{\varphi}$ имеет размерность радиан/с, т.е. 1/с.

Для нас сейчас принципиально, как через обобщённые выражается квадрат скорости. Разумеется, не как $\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2$. Вгн

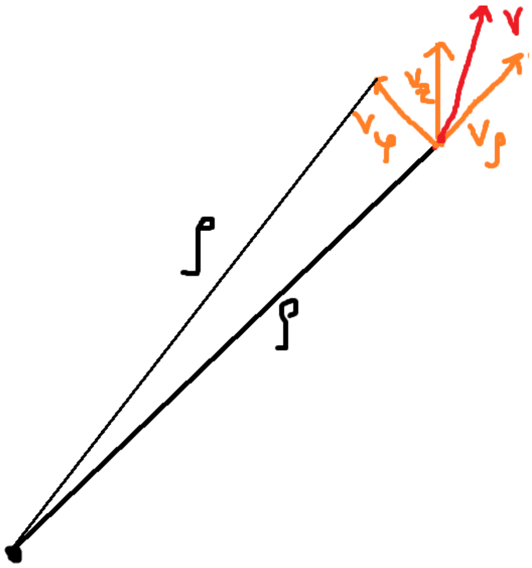


Как мы видим по рисунку, квадрат скорости v^2 есть сумма квадратов радиальной и поперечной компоненты $v_{\text{рад}}^2 + v_{\text{попереч}}^2$. С $v_{\text{рад}}$ всё просто – это $\dot{\rho}$. А что с $v_{\text{попереч}}$? Посмотрите на рисунок: это $\rho\dot{\varphi}$. Значит, $v^2 = \dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2$
Тогда кинетическая энергия через обобщённые скорости запишется как $T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2)$

3D

Цилиндрическая СК: координаты ρ, φ, z. Задача та же: записать квадрат скорости через обобщённые скорости $\dot{\rho}$, $\dot{\varphi}$ и $\dot{z}$.

Тут всё просто: отличие от полярной в том, что добавляется зетовая составляющая скорости



И поэтому квадрат скорости есть $\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$, а кин.энергия $\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$

Сферическая СК: координаты r, φ, θ. Задача та же: записать квадрат скорости через обобщённые скорости $\dot{r}$, $\dot{\varphi}$ и $\dot{\theta}$.

Тут уже красивую картинку, как в прошлом случае, не нарисуешь. Так что применим аналитическое решение, которые сработает и в совсем экзотических СК.

Ага. Например, таковой является параболическая СК.

(ξ, η, φ) - параболические координаты. По определению, это набор координат, которые связаны с цилиндрическими следующим образом:

$$\begin{cases} \rho \equiv \sqrt{\xi\eta}, \\ z = \dfrac{\xi - \eta}{2}, \\ \varphi = \varphi. \end{cases}$$

Некоторые семинаристы используют параболическую СК при решении некоторых задач.

Итак, мы точно знаем, что $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$. Также мы знаем:

$$x = r * \sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r * \sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r * \cos\theta$$

Так давайте подставим!

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\dot{\varphi}$$
$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\dot{\varphi}$$
$$\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\dot{\varphi}$$

Напомним читателю, что тут была применена формула из матана-2 для дифференцирования сложной функции:

$$\frac{du(a,b,c)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial u}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial u}{\partial c}\frac{dc}{dt}$$

Ну а далее

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\dot{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\dot{\varphi}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial z}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\dot{\varphi}\right)^2 \end{aligned}$$

И дело в шляпе. Делов-то – посчитать 9 производных. Ну, давайте:

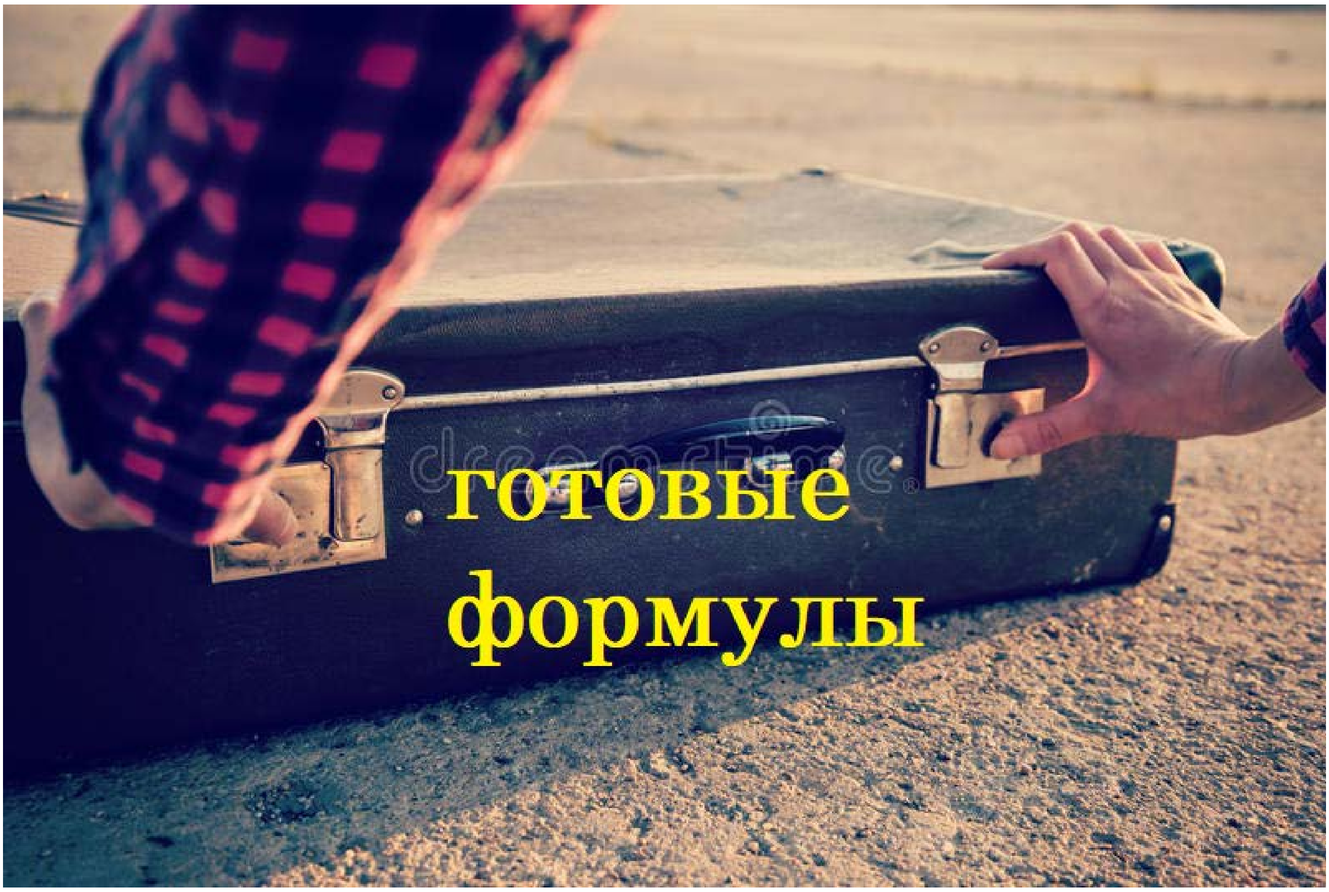
$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \\ &= \left(\sin\theta\cos\varphi\,\dot{r} + r * \cos\theta\cos\varphi\,\dot{\theta} - r * \sin\theta\, sin\,\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2 \\ &+ \left(\sin\theta\sin\varphi\,\dot{r} + r * \cos\theta\sin\varphi\,\dot{\theta} + r * \sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2 \\ &+ \left(\cos\theta\,\dot{r} - rsin\theta\dot{\theta}\right)^2 \end{aligned}$$

И если эту байду получим, то придём к достаточно красивому результату:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{z}^2$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{z}^2\right)$$

Теперь зачем нам это нужно. Мы получили готовые формулы! А затем, когда нам в дальнейшем потребуется кинетическая в НЕдекартовой СК, мы откроем чемодан с готовыми формулами



и сразу их используем.